# III. országos magyar matematikaolimpia
# XXX. EMMV
### megyei szakasz, 2020. január 18.

## XI. osztály

**1. feladat.** Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix. Jelöljük $a_n$-nel az $A^n$ mátrix elemeinek összegét, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

a) Igazold, hogy $a_n = 4n^2 + 5n + 3$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

b) Határozd meg az $\alpha \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{a_n} - \alpha n) = \frac{5}{4}.$$

*Szilágyi Judit, Kolozsvár*

*Megoldás.* Kiszámoljuk az első néhány hatványt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 14 & 8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 33 & 12 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 60 & 16 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Sejtés: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 4n^2 - n & 4n & 1 \end{pmatrix}$ **(2 pont)**

Teljesül, hogy

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 4n^2 - n & 4n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n+2 & 1 & 0 \\ 4n^2 - n + 8n + 3 & 4n+4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n+1) & 1 & 0 \\ 4(n+1)^2 - (n+1) & 4(n+1) & 1 \end{pmatrix}$$

A matematikai indukció alapján következik, hogy

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 4n^2 - n & 4n & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \textbf{(2 pont)}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{a_n} - \alpha n) = \lim_{n\to\infty} n \left( \sqrt{4 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}} - \alpha \right) \overset{\infty(2-\alpha)}{=} \begin{cases} \infty & \text{ha } \alpha < 2 \\ -\infty & \text{ha } \alpha > 2 \\ \infty \cdot 0 & \text{ha } \alpha = 2 \end{cases} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n+3}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{\sqrt{4n^2+5n+3}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}+2}=\frac{5}{4}.\quad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát $\alpha = 2$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

**2. feladat.** Adott az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat úgy, hogy $a_0 > 0$ és

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2 + a_n + 1},$$

bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

a) Mutasd ki, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan növekvő és nem korlátos!

b) Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

c) Számítsd ki: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^3}{n}$ értékét! *Matlap*

*Megoldás.* a) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n^2+a_n+1} = \frac{1}{\left(a_n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} > 0$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, tehát az $(a_n)$ sorozat szigorúan növekvő. **(2 pont)**

Feltételezzük, hogy a sorozat korlátos. Mivel szigorúan növekvő is, a sorozat konvergens, vagyis létezik $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$. Határértékre térve a rekurziós összefüggésben az $l = l + \frac{1}{l^2+l+1}$ összefüggéshez jutunk, ahonnan az $\frac{1}{l^2+l+1} = 0$ bármely $l \in \mathbb{R}$ esetén hamis egyenlőséget kapjuk. Tehát a feltételezésünk hamis volt, vagyis az $(a_n)$ sorozat nem korlátos. **(2 pont)**

b) Mivel az $(a_n)$ sorozat szigorúan növekvő és nem korlátos, a határértéke $+\infty$. **(1 pont)**

A rekurziós összefüggés mindkét oldalát elosztjuk $a_n > 0$-val, így az

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{a_n^3 + a_n^2 + a_n}$$

összefüggést kapjuk. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^3+a_n^2+a_n} = 0$, így a fenti kifejezésben határértékre térve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^3+a_n^2+a_n} = 1 + 0 = 1. \quad \textbf{(1 pont)}$$

c) Kiszámítjuk a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{(n+1)-n}$ határértéket.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}^3 - a_n^3) &= \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}^2 + a_{n+1}\cdot a_n + a_n^2)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^2+a_n+1}(a_{n+1}^2 + a_{n+1}\cdot a_n + a_n^2)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 + \frac{a_{n+1}}{a_n} + 1}{1+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n^2}} = \frac{1+1+1}{1+0+0} = 3. \quad \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}$$

Mivel a $b_n = n$ sorozat szigorúan növekvő és nem korlátos és létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{n+1-n} = 3$, a Cesaro-Stolz kritérium alapján az $\frac{a_n^3}{n}$ sorozat is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^3}{n} = 3$. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

**3. feladat.** Két játékos a következő játékot játssza: egy $5 \times 5$-ös „sakktábla” minden mezőjére felváltva, egy-egy számkártyát helyeznek el az 1-től 25-ig számozott számkártyák közül. A játék akkor ér véget, mikor mind a 25 számkártyát elhelyezték a táblán. A játékot a kezdő játékos nyeri meg, ha a tábla négy szimmetriatengelyének mindegyikén az őket fedő számkártyák összege (ez négy darab összeget jelent) osztható 13-mal, ellenkező esetben a második játékos nyer. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája és mi a nyerőstratégia? *Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy*

*Megoldás.* A tábla szimmetriaközéppontjában lévő mezőt nevezzük a tábla centrumának. A többi mezőt a centrumra vonatkozóan 12 darab szimmetrikus mezőpárba lehet rendezni.

Az első játékosnak van nyerő stratégiája és ez a következő: a 13-as számú kártyát a centrumba helyezi. (**2 pont**)

A megmaradt kártyákat olyan $(i, 26-i)$ párokba lehet rendezni, amelyek összege 26. Így, ha a második játékos letesz egy $i$ kártyát a tábla bármilyen mezőjére, az első játékos ennek a szimmetrikusára helyezi a $26-i$ kártyát. A játék végén a 4 szimmetriatengely bármelyike mentén a 13 és két $(i, 26-i)$, illetve $(j, 26-j)$ alakú pár áll, amelyek összege $13 + 2 \cdot 26$, ami osztható 13-mal. (**7 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

**4. feladat.** Legyen $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ két olyan mátrix, amely teljesíti a következő feltételeket:

$$AB = BA, \quad \det(A^2 - B^2) > 0, \quad \det A > 0 \quad \text{és} \quad \det B > 0.$$

Igazold, hogy

a) $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det A + \det B)$;

b) $\dfrac{1}{\det(A+B)} + \dfrac{1}{\det(A-B)} \geq \dfrac{2}{\det A + \det B}$. *Ványi Emese, Szatmárnémeti*

*Megoldás.* Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

ahol $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ekkor

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$
$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix},$$

innen pedig

$$\begin{aligned} \det(A+B) + \det(A-B) &= a_{11}a_{22} + a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} + b_{11}b_{22} - a_{12}a_{21} - a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} - b_{12}b_{21} \\ &\quad + a_{11}a_{22} - a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22} + b_{11}b_{22} - a_{12}a_{21} + a_{12}b_{21} + b_{12}a_{21} - b_{12}b_{21} \\ &= 2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= 2(\det(A) + \det(B)) \end{aligned}$$

(**5 pont**)

b) Mivel $AB = BA$ ezért $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ és

$$\det(A^2 - B^2) = \det((A+B)(A-B)) = \det(A+B)\det(A-B).$$ (**1 pont**)

De $\det A > 0$ és $\det B > 0$, így az a) alpont alapján

$$\det(A+B) + \det(A-B) = 2(\det A + \det B) > 0$$
$$\det(A+B) \cdot \det(A-B) = \det(A^2 - B^2) > 0,$$

ahonnan $\det(A+B) > 0$ és $\det(A-B) > 0$. (**1 pont**)

Felírjuk a középarányosok közti egyenlőtlenséget a $\det(A+B)$ és $\det(A-B)$ pozitív számokra:

$$\frac{2}{\frac{1}{\det(A+B)} + \frac{1}{\det(A-B)}} \leq \frac{\det(A+B) + \det(A-B)}{2} = \det(A) + \det(B),$$

innen következik, hogy

$$\frac{1}{\det(A+B)} + \frac{1}{\det(A-B)} \geq \frac{2}{\det A + \det B}.$$ (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■